

# La contribución de E. M. Gauthey al desarrollo de la teoría de cúpulas: el informe de 1771 sobre la estabilidad de la iglesia de Santa Genoveva en París

Gema López Manzanares

En 1771 el ingeniero Emiland M. Gauthey publicó una *Mémoire sur l'application des principes de la Méchanique a la construction des voutes et des domes*. En ella trató de responder al arquitecto Patte acerca de todas las objeciones que éste había puesto en su informe de 1770 a la construcción de la cúpula de la iglesia de Santa Genoveva de París, cuyos pilares consideraba de dimensión insuficiente (Straub 1952; Heyman [1985] 1995; Guillerme 1989; Huerta 1990, 2004; Coste *et al.* 1993; González Moreno-Navarro 1993; López 1998, 2005).<sup>1</sup>

## EL PROBLEMA PROPUESTO POR PATTE

Gauthey comienza su memoria señalando la tardía aplicación de «las reglas de la Mecánica» a la Arquitectura:

... parece que los Arquitectos no hubieran tenido jamás otra guía, en los preceptos que han dado, que su gusto o su genio, & no ha sido sino después de largos razonamientos & a través de los propios errores de los Artistas más famosos cuando algunos Matemáticos han descubierto por fin los principios más importantes de la construcción de los edificios.<sup>2</sup>

La Hire fue uno de esos matemáticos, que se dio cuenta de la necesidad de encontrar un principio para dimensionar el espesor de los contrafuertes que soportan las bóvedas (Huerta y Hernando, 1998). Pero Patte lo había aplicado mal, según Gauthey, al

duplicar el espesor obtenido. Según Gauthey, no se pueden extraer consecuencias válidas de edificios construidos sin ningún principio científico y proporciones tan variables como los elegidos por Patte. En realidad, la teoría permite rebajar esas proporciones.

## El método de La Hire para el cálculo del espesor de los estribos

Aunque Gauthey defiende la aplicación de los principios de la Mecánica, los somete a crítica. A diferencia de Patte, no cree que las fórmulas sean tan exactas como para suponer que cualquier pequeña imperfección afectaría gravemente a la estabilidad.<sup>3</sup> Es más, la teoría se basa en simplificaciones que Gauthey no considera siempre válidas; además de que no se había encontrado una solución universal, es decir, un resultado único y verdadero, los matemáticos eran conscientes de la cierta inexactitud de sus cálculos y preferían adoptar hipótesis más desfavorables para una aplicación segura en la práctica. Por tanto, no sólo no había que incrementar el espesor obtenido a través de las fórmulas sino que incluso podía reducirse.<sup>4</sup>

A continuación, Gauthey analiza el método de La Hire, el más utilizado para dimensionar los estribos de las bóvedas. Basándose en él otros autores habían elaborado fórmulas que permitían un más fácil manejo en la práctica, como Bélidor (1729), cuyas fórmu-

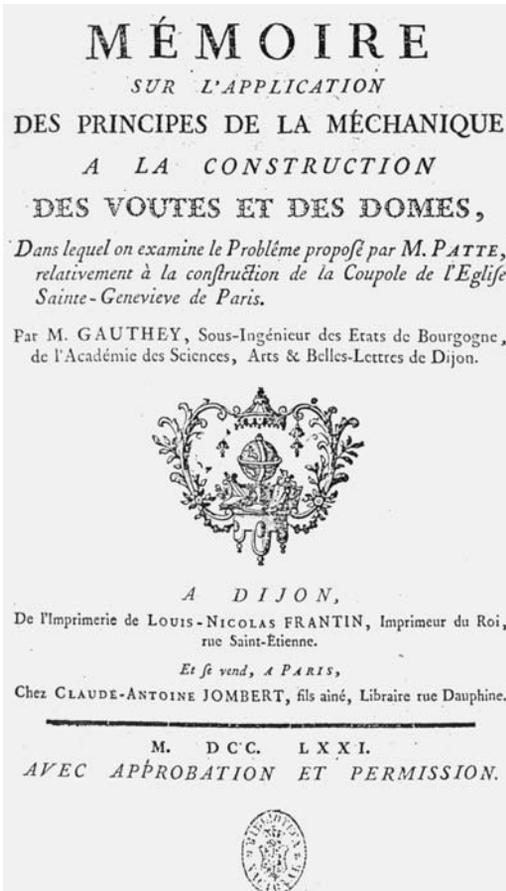


Figura 1  
 Portada de la *Mémoire sur l'application des principes de la Méchanique* (Gauthey 1771)

las empleó Patte. La intención de Gauthey es ver si las hipótesis adoptadas en ese método eran las más correctas.

El método de La Hire consideraba la bóveda en un estado de colapso. Gauthey explica cómo La Hire había observado «que las bóvedas cuyos estribos no tienen un espesor suficiente para resistir al empuje, se agrietan normalmente hacia la mitad de los riñones.»<sup>5</sup> La Hire calcula entonces el espesor que hay que dar al estribo para que no se produzca ese agrietamiento, sin tener en cuenta el rozamiento en la junta de los riñones. El empuje de la cuña central, per-

pendicular a la junta de rotura, produce un momento respecto al borde exterior del estribo que ha de ser equilibrado por el peso del resto de la bóveda. Gauthey desarrolla para un arco de trasdós recto el procedimiento de dimensionado del estribo según la Fig. 1 de la figura 2.<sup>6</sup>

### Las hipótesis adoptadas en el método de La Hire

La posición de junta de rotura

En primer lugar hay que considerar el punto en el que se supone se produce la rotura. Como se puede ver en la figura la junta de rotura se ha obtenido mediante la intersección de una recta a 45° con la sección de la bóveda. Gauthey aclara que esta hipótesis no es válida en todos los tipos de bóvedas, pero para las de intradós semicircular resulta ser la que exige un mayor espesor del contrafuerte. Es decir, la hipótesis es la más desfavorable, y eso lo demuestra calculando el espesor de una bóveda de cañón situando la junta en tres posiciones distintas, una de ellas a 45° y las otras dos a un pie por encima y por debajo de ese ángulo, respectivamente. El espesor requerido en la hipótesis de la junta a 45° es el mayor de los tres obtenidos.<sup>7</sup>

Sin embargo, el punto donde se produce la rotura no sólo queda determinado por el ángulo, o sea la junta en la que se produce, sino su posición dentro de ésta. Bélidor, y por tanto también Patte, colocaba el llamado *centre d'impression* en el punto medio de la sección. Gauthey, sin embargo, dice que ha de suponerse que el empuje actúa en la parte más próxima a la arista de intradós, lo que significa un brazo de palanca menor y por tanto, un momento desestabilizante debido a la *puissance agissante* más pequeño.<sup>8</sup>

Además, Gauthey señala que para simplificar los cálculos se ha supuesto que el centro de gravedad de la parte de bóveda situada por debajo de la cuña coincide con el del estribo. Pero el brazo de palanca sería mayor puesto que el centro de gravedad se sitúa más hacia el interior gracias a la parte de bóveda adosada al estribo, y eso aumenta el momento estabilizante de la *puissance résistante*. Por otro lado, la junta de rotura sería vertical en la zona del trasdós, lo que implica una cuña de menor peso y un contrarresto más fuerte.

### La fuerza de rozamiento

Al evaluar el momento que han de contrarrestar los estribos debido al empuje de la cuña, no sólo influye su punto de aplicación, sino también el ángulo que forma con la junta de rotura. El modelo de la cuña se basa en la hipótesis de que no hay rozamiento entre las dovelas y por tanto ese ángulo debe ser de  $90^\circ$ . Pero Gauthey propone un ejemplo para explicar que esta hipótesis dista mucho de la realidad constructiva. Es como si en las juntas de rotura hubiera pequeñas esferas de hierro fundido transmitiendo el empuje. Pero en la realidad la superficie de las dovelas no está pulida de ese modo. La conclusión es que La Hire estaba utilizando esta hipótesis de forma consciente para obtener resultados del lado de la seguridad.

Interesa aquí explicar la revisión que hace Gauthey de los resultados cuando se considera que sí hay rozamiento. Para ello transforma la cuña del arco en una esfera de peso equivalente soportada por dos barras articuladas, Fig. 2 de la figura 2. Para que las barras no se abran debido al peso de la esfera hay que aplicar en sus extremos dos fuerzas perpendiculares, LH y KJ (o lo que es lo mismo, un empuje perpendicular a la junta de rotura). Para componer estas fuerzas sustituye LH y KJ por AK y AL respectivamente, cuya resultante es el peso de la esfera, o sea AC. Ahora bien, ese movimiento no puede producirse sin que la esfera deslice sobre las barras. Pero para que se inicie ese deslizamiento hay que vencer la fuerza de rozamiento de la esfera con las barras. Gauthey da tres posibles valores para la fuerza de rozamiento dependiendo de la talla de las piedras. Normalmente hace falta una fuerza de al menos  $1/2$ , o incluso  $2/3$  del peso de la piedra que se quiere desplazar. Si las superficies estuvieran perfectamente pulidas bajaría a  $1/3$ .

Pues bien, en el modelo de la esfera Gauthey toma un coeficiente de rozamiento intermedio, de  $0,5$ . Eso significa que en el momento en que LH y KJ no fueran suficientes para contrarrestar el peso de la esfera se desarrollarían fuerzas de rozamiento en L y K, paralelas a la barra y sentido ascendente, cuyo valor es igual a la mitad de LH y KJ. Como AL y AK representan a KJ y LH, AF y AE serán las fuerzas de rozamiento aplicadas en K y L respectivamente, que compuestas dan una resultante vertical AG.

La conclusión es que las fuerzas de rozamiento también colaboran a contrarrestar el peso de la esfe-

ra, igual ahora a la suma de AG y AC. Eso quiere decir que el empuje, o sea las fuerzas LH y KJ aplicadas en los extremos de las barras valen dos tercios respecto a la hipótesis sin rozamiento. Es como si la cuña pesase  $2/3$  veces menos.

Gauthey vuelve a calcular el espesor del estribo a la derecha de la Fig. 1 en la figura 2, en la hipótesis de rozamiento entre las juntas, utilizando en la fórmula un valor de P reducido en  $2/3$ . Realizando la simplificación de que  $GF=PO$ , obtiene un espesor TG  $1/6$  veces menor que en la hipótesis sin rozamiento.<sup>9</sup>

### La tenacidad

Por último, Gauthey considera que la tenacidad de los morteros ayudaría a impedir el deslizamiento y, por tanto, incluso en la hipótesis de rozamiento entre las juntas se estaría del lado de la seguridad.

### Hipótesis que podrían ir en contra de la seguridad

Gauthey reflexiona incluso sobre el hecho de que los estribos o los muros de apoyo se agrietan en ocasiones a la mitad de la altura. Sin embargo, demuestra que, salvo que existan defectos graves en esa zona que disminuyan de forma importante su solidez, el estribo girará hacia fuera en torno al borde de la cimentación.<sup>10</sup>

Tampoco cree que las grietas numerosas que, a veces, aparecen en los arcos, repercutan en la estabilidad global, esto es, que las *puiffances agiffantes* «tengan más efecto que cuando se encuentran reunidas en un solo esfuerzo.»<sup>11</sup>

Gauthey termina con una cita de Bélidor sobre la seguridad que ofrece la teoría.

### El proceso constructivo: el descimbrado

Para terminar esta parte general, Gauthey habla de la única situación en la que el método de La Hire está justo en el límite de la seguridad: el momento del descimbrado. En ese momento dice, cuando los morteros no han fraguado, se podría considerar que entre las juntas hay esferas que permiten el deslizamiento de las piedras e interrumpen la conexión entre éstas,

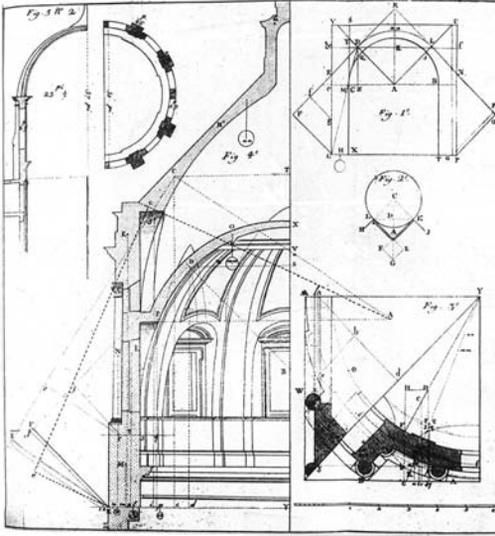


Figura 2  
Dimensionado del estribo de las bóvedas. Aplicación a la cúpula proyectada por Soufflot en 1764 (Gauthey 1771)

es decir, que no se podría contar con el rozamiento ni con la tenacidad.

Se cita el caso de un depósito dimensionado de acuerdo con el método de La Hire que se desplomó en el momento del descimbrado.<sup>12</sup> Eso le da pie a explicar que la compresibilidad del terreno también es un factor a considerar, que puede invalidar los resultados de la teoría. Pero, eso sí, «el tambor de la cúpula está soportado por una fábrica incompresible»,<sup>13</sup> y no hay que regruesar con zapatas el muro como se suele hacer con los edificios apoyados directamente en el suelo. Patte también contaba con que había que aumentar el espesor del tambor por este motivo.

Otra forma de disminuir los riesgos del descimbrado es reducir el tiempo de fraguado de los morteros, por ejemplo empleando yeso, o manteniendo las cimbras el mayor tiempo posible.

Así, para la cúpula de Santa Genoveva propone que la interior se haga de materiales ligeros, tufo o ladrillo unidos con yeso. Esto disminuiría mucho los empujes. Para la cáscara exterior, que ha de ser más resistente, propone la sillería y que se dejen las cimbras todo el tiempo necesario hasta el fraguado del mortero, ya que quedarían ocultas a la vista por la

cáscara inferior. Incluso llega a proponer en este sentido la colocación de zunchos de hierro, útiles hasta la consolidación de las fábricas.<sup>14</sup>

#### APLICACIÓN DE LA TEORÍA AL CÁLCULO DEL EMPUJE DE LA CÚPULA Y LAS NAVES DE SANTA GENOVEVA

##### La cúpula

En el quinto apartado de su *Mémoire* Gauthey aplica el método de La Hire al análisis de la estabilidad de la cúpula de Santa Genoveva. Es decir, estudia un modelo de colapso de la cúpula proyectada por Soufflot en 1764, Fig. 4 en la figura 2, y comprueba la relación entre los momentos desestabilizantes y los estabilizantes.

##### Hipótesis del análisis

Gauthey explica que toma de Patte la figura de la cúpula, pero a un tamaño mayor. Aunque en el apartado dedicado a la teoría recomendaba construir la cúpula interna con materiales ligeros aquí va a calcularla como si fuera de sillería. Indica también el espesor de la cúpula externa, de dos pies en el punto más delgado y sin contar las gradas.

##### El modelo de rotura

El método de La Hire se aplicaba a los arcos y a las bóvedas pero no concretaba el caso de las cúpulas. Gauthey va a tener en cuenta entonces la posible aparición de patologías en la cúpula de Santa Genoveva, deduciendo que ésta podría agrietarse en el plano de los meridianos por las zonas más débiles de la fábrica, las ventanas del tambor. Aunque de las ocho ventanas, cuatro corresponden a refuerzos importantes del muro y no constituyen por tanto zonas debilitadas, considera que también allí se producirán grietas. Es decir, divide la cúpula en sectores, ocho, que después se analizarán independientemente como arcos de espesor variable. En este sentido resulta interesante la crítica de Gauthey a Frézier, el primero en analizar las cúpulas dividiéndolas en sectores, y la inexistente mención a Poleni o a Bossut.<sup>15</sup>

Además, hay que determinar la posición de la junta de rotura de los riñones. Gauthey coloca la de la cúpula externa, de tercio punto,<sup>16</sup> a la mitad del desarrollo del intradós entre el arranque y la base de la linterna, y la dirección la determina ese punto y el centro A del arco de la circunferencia. La de la cúpula interior, semiesférica, la coloca a 45° a partir del punto B, centro de la circunferencia de intradós, Fig. 4 en la figura 2.<sup>17</sup>

El análisis de la cúpula

Una vez dividida la cúpula en ocho partes el análisis consiste en aplicar el método de La Hire a estos arcos de espesor variable. Primero, evalúa los volúmenes de las diferentes partes de la estructura: la linterna, las dos bóvedas y el tambor, incluso los que hay que descontar por la existencia de huecos, y teniendo en cuenta la posición de las juntas de rotura de ambas cúpulas, tabla 1.<sup>18</sup> Después, calcula los momentos estabilizantes y desestabilizantes que producen los pesos de las distintas partes, pero en base a los volúmenes de la tabla 1, es decir, suponiendo la estructura construida con un material homogéneo.

Tabla 1  
Evaluación de cargas de la cúpula de Santa Genoveva proyectada por Soufflot (Gauthey 1771)

[14] Parties de la Coupole.	Surface du profil.	Circumference que décrit le centre de gravité.	Cube de chaque partie de la coupole.	Huitième du cube des parties de la coupole.
Le piédestal & le groupe, . . .	pi po	pi po	1186 10	147 7
Le dessus de la voûte en tiers point, H	78 0	91 8	7150 0	893 9
Le dessous de la voûte en tiers point, J	78 5	179 8	14088 9	1761 1
L'attique & corniche du tambour, K	100 3	115 10	21637 2	2704 8
Le tambour où font les colonnes, L	120 0	211 1	25330 0	3166 3
Le socle au dessous des colonnes, M	135 0	217 4	29340 0	3667 6
Le dessus de la voûte en cul de four, O	30 0	78 5	2352 0	294 0
Le dessous de la voûte en cul de four, P	36 0	176 0	6336 0	792 0
Les seize demi-colonnes du pourtour, . . .			2400 0	300 0
Les parties au dessus des lunettes de la voûte en cul de four,			160 0	20 0
Le cube des corniche & attique des avant-corps, q . . .			8320 0	1040 0
Le cube du tambour des avant-corps, . . .			12800 0	1600 0
Le cube des socles des avant-corps, . . .			10480 0	1310 0
Les huit colonnes des avant-corps, . . .			1660 0	207 6
<b>A D É D U I R E</b>				
Le vuide des huit fenêtres & des œils de bouff, . . .			4352 0	548 0
Les quatre grandes lunettes de la voûte en tiers point, . . .			3844 0	480 6
Les quatre petites lunettes de la même voûte, . . .			96 0	12 0
Les huit lunettes de la voûte en cul de four, . . .			432 0	58 0
Les quatre fenêtres & les œils de bouff des avant-corps, . . .			3536 0	442 0
Le cube d'une partie du socle au dessus des arcs de la nef,			1096 0	137 0

Momentos desestabilizantes

En primer lugar, Gauthey calcula el valor del empuje de cada una de las cúpulas. Éste viene determinado por la junta de rotura de los riñones, y en ambos casos, se supone aplicado en la mitad de la sección. Después, sabiendo el peso de las cuñas que determinan esas juntas y la dirección en la que actúan los empujes respectivos de las cúpulas puede obtener fácilmente su magnitud. El de la cúpula superior se obtiene estableciendo una relación proporcional entre el peso de la cuña y el empuje equivalente a la que hay entre el lado TC y el CV del triángulo TCV de la figura. Lo mismo se hará para el de la cúpula inferior, pero con el triángulo SDB.

Conocida la magnitud de ambos empujes, sólo quedaría obtener el momento que producen respecto al punto R, el borde exterior de la base del tambor. Para ello habrá que trazar una perpendicular a las líneas de acción de los empujes, CE y DF, y medir la distancia a ellas desde el punto R, o sea, los brazos de palanca, RE y RF en la Fig. 4, figura 2.

Momentos estabilizantes

Una vez calculados los momentos desestabilizantes, los estabilizantes se obtendrán multiplicando los pesos por su brazo de palanca respecto al mismo punto R. Para encontrar el centro de gravedad de un sector de cúpula, Gauthey proyecta las líneas de acción de los pesos de las diversas partes estabilizantes sobre la recta YR en la sección de la Fig. 4. Después lleva esas distancias sobre la recta YR de la Fig. 3, es decir, la bisectriz en planta del sector, donde R es el verdadero punto de vuelco. Hace una serie de agrupamientos entre los pesos, como J y P; K, L y M y, por separado, N (el peso de las columnas), es decir, obtiene el centro de gravedad de esos pesos agrupados sobre la YR de la Fig. 3. Después traza arcos con centro en Y que pasan por los que serían centros de gravedad de la sección, y después, en cada uno, la cuerda que determina aproximadamente el ángulo mitad del sector, cuya intersección con la recta YR da la verdadera posición de los centros de gravedad.

Por último, vuelve a llevar estas magnitudes a la sección de la Fig. 4, que aunque no corresponde a la YR de la planta la representa, y obtiene los mo-

mentos respecto al punto R. El resultado obtenido es:

$$\begin{aligned} Me &= 66233 \text{ pies}^4 \text{ 10 pulgadas}^4 \\ Md &= 42223 \text{ pies}^4 \text{ 10 pulgadas}^4 \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento, que deja reducido el peso de las cuñas a  $2/3$ , la relación es todavía más favorable, es decir, para el mismo momento estabilizante<sup>19</sup>

$$Md = 28146 \text{ pies}^4$$

#### Los macizos de contrarresto

Al parecer estaba prevista la colocación de una serie de macizos de contrarresto en el tambor coincidentes con los pilares, Fig. 3 en la figura 2. Gauthey, que en la primera hipótesis no los tuvo en cuenta, va a demostrar que favorecen la relación entre los momentos estabilizantes y desestabilizantes.<sup>20</sup> Además tiene en cuenta que en ambas cúpulas existen una especie de nervios entre los lunetos que canalizarán los empujes en el plano YF de la Fig. 3.

Como antes, obtiene los momentos que producen los empujes de las dos cúpulas, pero ahora respecto a la línea AB, tangente al tambor y al macizo en el fragmento de cúpula analizado, en torno a la cual volcaría la cúpula si no hubiera equilibrio. Así, para los momentos estabilizantes, los brazos de palanca se obtienen midiendo la distancia desde la línea YR a la AB. Para el cálculo de los momentos desestabilizantes proyecta los empujes contenidos en el plano, cuya traza en planta es YF, Fig. 3, sobre un plano perpendicular a la línea AB, de lo que resulta un empuje menor del correcto, compensado al llevar a la sección las distancias de C y D a la línea AB, que dan un brazo de palanca mayor del real.

Los resultados obtenidos en esta hipótesis serían:

$$\begin{aligned} Me &= 101221 \text{ pies}^4 \\ Md &= 35527 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el rozamiento los resultados son aún más favorables:

$$\begin{aligned} Me &= 101221 \text{ pies}^4 \\ Md &= 23682 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

El punto de vuelco en la base

Como ya demostró, si hubiera tomado el momento de vuelco en un punto más alto del tambor, donde empieza el zócalo, los resultados serían aún más favorables.

El muro de Patte

Patte había obtenido el espesor del muro estableciendo el equilibrio entre los momentos estabilizantes y los desestabilizantes. Gauthey vuelve a calcular la relación entre los momentos para la cúpula doble de la Fig. 4, figura 2, en la hipótesis de que el muro fuera el calculado por Patte y que el vuelco se produjera por encima del zócalo, sin tener en cuenta la contribución de los macizos de contrarresto.

Como se puede ver los brazos de palanca  $r_e$  y  $r_f$  han disminuido y aunque también lo han hecho  $r_q$  y  $r_T$ , que son los que dan el momento estabilizante, el balance total es en este caso más favorable que en la hipótesis de Patte donde la relación entre unos y otros momentos era de 1.<sup>21</sup>

Los resultados obtenidos por Gauthey son:

$$\begin{aligned} Me &= 33493 \text{ pies}^4 \\ Md &= 30922 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

La altura del tambor

Como el problema planteado por Patte radicaba en la insuficiencia de los pilares para soportar una cúpula de esas dimensiones, Gauthey calcula incluso la estabilidad en el caso de que la cúpula con los macizos de contrarresto estuviera colocada sobre un muro de treinta metros más de altura y el mismo espesor que el zócalo.<sup>22</sup> De nuevo los resultados confirman la estabilidad:

$$\begin{aligned} Me &= 133209 \text{ pies}^4 \\ Md &= 64905 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

La posición de la junta de rotura de los riñones

Por último, Gauthey vuelve a considerar la posición de la junta de rotura y comprueba numéricamente

cuál sería la relación entre los momentos suponiendo la junta en los arranques de la cúpula, cuyo empuje se representa a línea de rayas discontinuas en la Fig. 4, sin considerar la contribución de los macizos de contrarresto y del rozamiento. El resultado es más desfavorable pero aun así sigue siendo seguro:

$$\begin{aligned} Me &= 59933 \text{ pies}^4 \\ Md &= 44590 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

### Interpretación de los resultados

Por último es interesante conocer cómo valora Gauthey la relación entre los momentos:

Solamente se puede concluir que, cuando la potencia resistente es el triple de la potencia activa todavía se podría cargar la clave de la cúpula con un peso triple que el actual sin romper el equilibrio.<sup>23</sup>

### La estructura sustentante de la cúpula

Como el problema parecía residir en la dimensión insuficiente de los pilares, Gauthey también analiza la estabilidad de la estructura sustentante de la cúpula, donde la dimensión de los arcos torales debía ser de «cuarenta pies de diámetro, cincuenta y cuatro pies de altura para los pilares y cuatro pies, tres pulgadas de espesor medio en la clave».<sup>24</sup>

Gauthey analiza la validez del espesor de los pilares, variable según la dirección que se considere por su planta triangular. En todos los casos analiza un modelo agrietado de la estructura, grietas que se producirán en el punto F de la Fig. 3, figura 2, en la zona donde el macizo de contrarresto de la cúpula conecta con el tambor y que él considera la hipótesis más desfavorable. Eso conlleva un reparto de la carga de la cúpula sobre los arcos torales y las pechinas tal que la zona de la clave de los arcos junto a la parte correspondiente de las pechinas soporta 1/6 del peso total, mientras que el resto de las pechinas unidas a los pilares soportarán 1/12 parte de ese mismo peso más los macizos de contrarresto. Es decir, no se tiene en cuenta la componente horizontal del empuje procedente de la cúpula, sino sólo las cargas verticales que actúan sobre la estructura soporte. Nuevamente, como en el análisis de la cúpula, hay que encontrar la relación que existe entre el momento que

produce el empuje sobre el pilar y el que lo contrarresta y para ello también hace falta evaluar el peso de cada una de las partes de la subestructura.<sup>25</sup>

Comienza por la dirección diagonal.<sup>26</sup> Es necesario, en primer lugar, obtener el valor del empuje de un arco toral en su plano según el método de La Hire, Fig. 5, figura 3. La junta de rotura se ha colocado a 45° (es decir, la que determina el punto F de la Fig. 3, figura 2) y en el peso de la cuña se incluyen el del arco toral, la parte de pechina que quedaría adherida a él, más 1/6 del peso total de la cúpula. El valor del empuje, que actúa perpendicularmente en el punto medio de la junta de rotura, se deduce del ángulo que forma con el peso total de la cuña, 45°. Después, como en cada pilar concurren dos arcos torales habría que componer los empujes que producen cada uno de ellos en el espacio. En todo caso la resultante queda definida por su magnitud y dirección, siendo aquí el punto de aplicación o, situado en la diagonal del pilar a la misma altura que la junta de intradós que define la cuña del arco toral, Fig. 6, figura 3.<sup>27</sup> Para conocer la magnitud del empuje total se sirve de la planta de la Fig. 3, figura 2, y establece que la relación entre el empuje de cada uno de los arcos y la resultante es la que guardan en planta sus componentes horizontales. Después hay que conocer la dirección del empuje y para ello se sirve de una construcción geométrica. Une en planta los puntos c y h que son los que indican la posición de la rótula de los arcos torales en su borde exterior, y desde c traza una perpendicular a la línea ad obteniendo el punto b. Después, ya en la Fig. 6, lleva la distancia cb sobre la horizontal desde o y después en vertical ca=bn. De este modo, uniendo n con o se tendría la dirección del empuje.<sup>28</sup>

Por último, no queda más que obtener el momento que daría este empuje multiplicando su valor por el brazo de palanca, Pq, donde P representaría el vértice del pilar. Del mismo modo obtendríamos el momento de los pesos que contrarrestan el empuje, una fuerza vertical que actúa a una distancia mP del borde del pilar.<sup>29</sup> Los resultados obtenidos en esta hipótesis son favorables:

$$\begin{aligned} Me &= 334120 \text{ pies}^4 \\ Md &= 267077 \text{ pies}^4 \end{aligned}$$

Estos valores le permiten deducir que el pilar sería estable sometido al empuje de un sólo arco toral, que

actuaría en el plano donde la dimensión del pilar es mayor, exceptuando la diagonal de la planta triangular del pilar, dirección en la cual nunca sufrirá empujes. Vuelve a calcular los valores de los momentos para esta hipótesis, que resultan más favorables incluso.<sup>30</sup> Es decir:

$$M_e = 341891 \text{ pies}^4$$

$$M_d = 233366 \text{ pies}^4$$

### Las pechinas

Antes de comprobar si los pilares serían estables sometidos al peso en voladizo de las pechinas, Gauthey analiza el comportamiento estructural local de estos elementos.

Habría dos posibles modos de agrietamiento para las pechinas. Si se agrietaran horizontalmente, es decir, si apareciera una grieta paralela al pilar en planta sobre las pechinas, el empuje se produciría en el plano que contiene la diagonal del pilar. Si se produjeran grietas verticales en lugar o además del agrietamiento horizontal, el empuje debido al peso de la pechina se estaría produciendo sobre los arcos torales. Teniendo en cuenta la estereotomía de las pechinas, donde los planos de las juntas convergen en el eje de rotación de la cúpula, esta segunda hipótesis parece la más correcta. Gauthey deduce entonces que la cuña que se formaría en las pechinas empujaría contra los arcos torales al intentar descender. De este modo la componente horizontal en planta del empuje de las pechinas contrarrestaría en parte el empuje en la clave de los arcos torales. La componente perpendicular a ésta se transmitiría a las naves de la iglesia y sería contrarrestada por los diferentes elementos constructivos. Así, «los pilares no tienen prácticamente otro fin que soportar el peso».<sup>31</sup>

Incluso en la hipótesis de que las pechinas se agrietasen horizontalmente, al ser la curvatura de los sillares mucho menor en la zona de los arranques el empuje según el plano diagonal «no es comparable con el de una bóveda ordinaria».<sup>32</sup>

Por último, Gauthey decide comprobar como Patte la estabilidad al vuelco del pilar, en este caso hacia el interior, que provocaría el peso en voladizo de la pechina con toda la carga que ésta recibe.<sup>33</sup> Es decir, considera la parte de estructura entre las juntas de rotura F y O, Fig. 3 en la figura 2, y la analiza aislada-

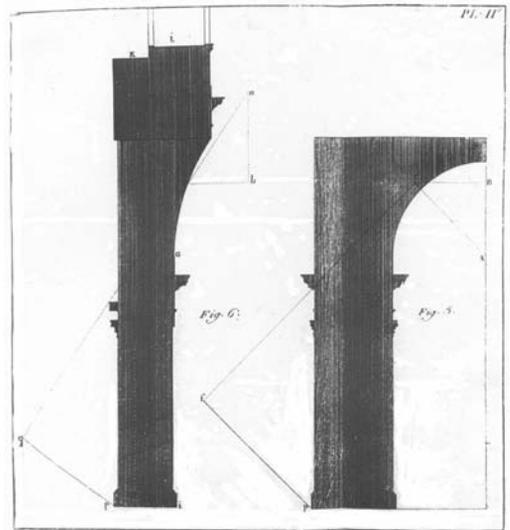


Figura 3

Estabilidad de los pilares sometidos al empuje de los arcos torales y las pechinas (Gauthey 1771)

mente.<sup>34</sup> El punto de vuelco considerado es G, situado en el arranque de las pechinas, Fig. 6 en la figura 3, y la sección del pilar analizada, la diagonal. Toda la carga que reciben las pechinas producirá un momento que tiende a volcar la parte de pilar considerado, que también soporta parte del macizo de contrarresto. El resultado obtenido es:

$$M_e = 68864 \text{ pies}^4$$

$$M_d = 67774 \text{ pies}^4$$

Como el margen de seguridad no es muy amplio, Gauthey matiza que habría que haber tenido en cuenta el empuje de la cúpula, con su componente horizontal, la cual habría desplazado el centro de gravedad del contrapeso incrementando el valor de los momentos estabilizantes.

## INTERVENCIONES EN LA ESTRUCTURA DEL EDIFICIO

### Columnas y arbotantes

En la parte final de su memoria, Gauthey dedica un apartado a proponer diversas medidas que mejorarían

la estabilidad del edificio. Según sus propias palabras, «se podrían suprimir los macizos construidos para soportar la cúpula dejando solamente las tres columnas adosadas a cada macizo».<sup>35</sup>

En este apartado Gauthey va a utilizar el concepto de resistencia para sus cálculos. Su objetivo es hacer intervenir a todo el edificio en la estabilidad de la cúpula, es decir, no solamente a los cuatro grandes macizos que reciben a los arcos torales, sino a todas las columnas de las naves y los muros perimetrales mediante la construcción de varios arbotantes.<sup>36</sup> En sus propias palabras:

... empleando para la construcción de la cúpula de Santa Genoveva un procedimiento análogo al de los puntales de madera es fácil concebir que se puede sostener este edificio casi enteramente mediante una especie de puntales de fábrica, construyendo desde cada una de las pechinas robustos arbotantes que se apoyarían contra el ángulo entrante de los muros del perímetro, & en consecuencia contra estos mismos muros, que resistirían a su empuje en el sentido de su longitud, lo que daría a la cúpula puntos de apoyo firmes y entonces las columnas, así como los macizos no soportarían más que una pequeña parte.<sup>37</sup>

Analiza una cuarta parte de la estructura, Fig. 7 en la figura 4. En primer lugar obtiene el peso que soporta cada una de las columnas por su posición dentro de la planta.<sup>38</sup> Después establece una carga máxima que no se debe sobrepasar en cada columna. Esta carga viene determinada por la columna O, Fig. 9 en la figura 4.<sup>39</sup> Esa columna recibe el empuje del arco AB, de la misma luz que los arcos torales, cuya componente horizontal es necesario contrarrestar. La tribuna, con una luz mucho menor, contribuye a ello con un empuje simétrico también a 45° que no es suficiente. Hace falta colocar el arbotante DM, a 45°, que por su propio peso más el que toma de la cúpula iguale el empuje del arco AB. La carga vertical total que recibe esa columna (expresada por el volumen que la produce) es de 1600 pies<sup>3</sup>.

El problema es, en definitiva, hacer que toda la retícula de columnas y los muros contribuyan a soportar el peso de la cúpula, que se transmite a través de arbotantes como los de la Fig. 8, figura 4. Pero incluso agotando la capacidad de cada columna, es decir, la carga que aún podría soportar cada una hasta llegar a 1600, todavía quedan 25204 pies<sup>3</sup> de la cúpula que repartir a los muros.<sup>40</sup> La solución constructiva pasa por construir una serie de arbotantes en direc-

ción diagonal a 45°, KL, BM y HN, Fig. 7 en la figura 4. En las Figs. 10 y 11 de la misma lámina se representa el alzado de KL y BM, donde KL son en realidad dos arbotantes, que transmitirán una carga dos veces mayor que los laterales.

Gauthey también habla del dimensionado de los arbotantes y de su estereotomía. Una vez conocida la carga vertical que debe transmitir cada uno se puede conocer el área de su sección horizontal suponiendo que esa carga es proporcional al área de la sección de cualquier elemento estructural.<sup>41</sup> En cuanto a su estereotomía esos arbotantes deberán tener «redientes» en su encuentro con los elementos verticales, Figs. 10 y 11, figura 4.<sup>42</sup>

### Intervenciones en la cúpula

Después de un apartado dedicado a analizar el comportamiento de las platabandas y la forma de mejorarlo con tirantes de hierro,<sup>43</sup> Gauthey estudia las operaciones que podrían realizarse en la cúpula para mejorar la estabilidad: colocar anclajes de hierro entre los sillares del tambor y tallar éstos de modo que las hiladas se empotraran unas en otras una o dos pulgadas formando una especie de «cadenas de piedra».<sup>44</sup>

En cuanto al proyecto de la cúpula también propone algunas modificaciones que reducirían su peso y, por tanto, su empuje, Fig. 13 en la figura 4. Se trataría básicamente de construir ocho nervios de piedra que dirigirían los esfuerzos a los cuatro macizos de contrarresto, que tienen un gran brazo de palanca. Incluso se podría modificar el trazado de esos nervios colocando su arranque en un punto más bajo, lo que apuntaría la cúpula exterior reduciendo aún más el empuje.

### CONCLUSIÓN

Como conclusión, Gauthey considera que el proyecto de la cúpula, de perfil apuntado, se adecua perfectamente a la estabilidad. Los macizos de contrarresto se alejan lo más posible de la clave de los arcos torales, y canalizan los esfuerzos de la cúpula hacia los pilares por medio de los lunetos de la cúpula superior. Se podría reducir incluso el espesor del tambor entre los macizos de contrarresto. En cuanto al resto de la estructura del edificio Gauthey considera que

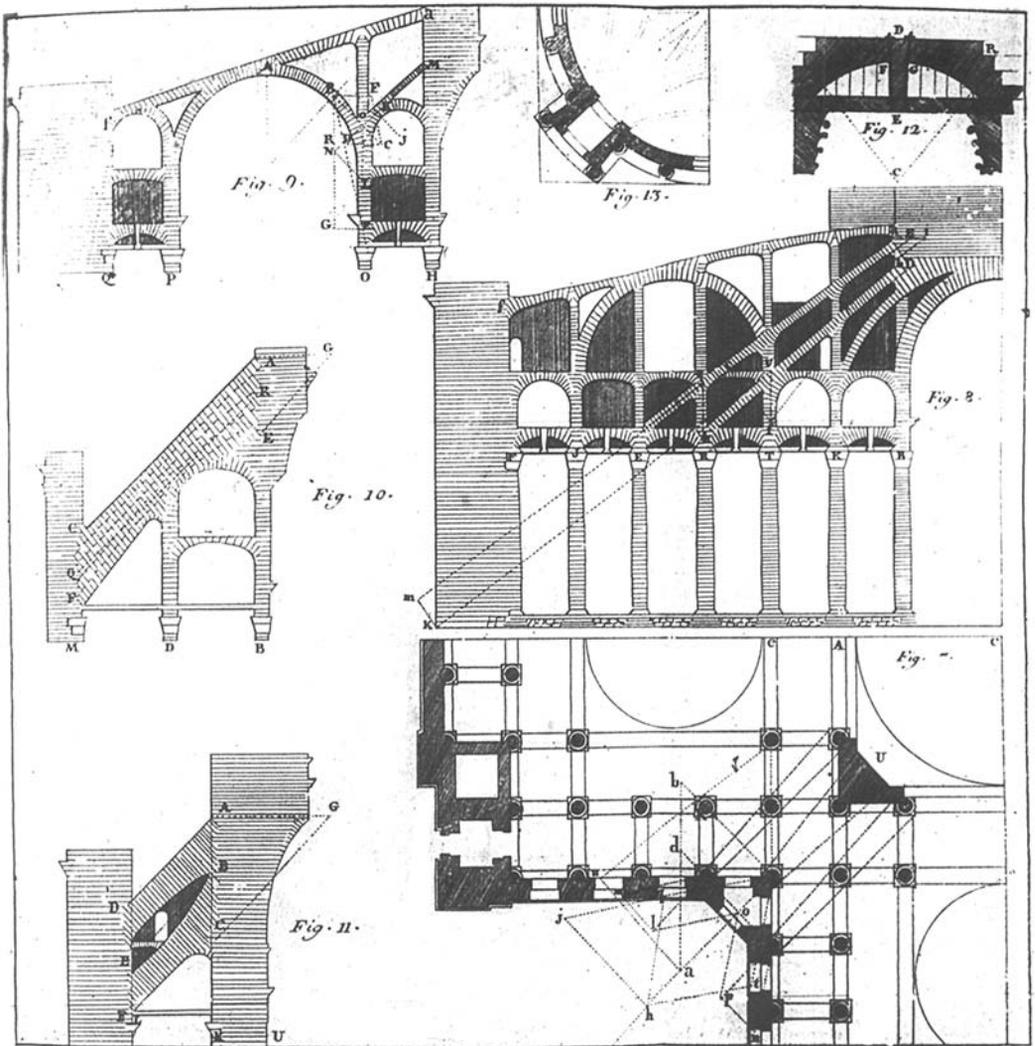


Figura 4  
La estabilidad global del edificio. Arbotantes y platabandas (Gauthey 1771)

«el arte del Constructor consiste en dividir la carga entre todas las partes del edificio; es el fruto de un estudio profundo de las fuerzas que pueden contrarrestar a otras en todas las direcciones convenientes». <sup>45</sup> Y, como hemos visto, eso es lo que hace al repartir el peso entre las columnas y los arbotantes. La estructura, no sólo de la cúpula, sino la de todo el edificio actúa como una unidad según Gauthey, in-

fluido claramente por la tradición del Gótico en Francia. Su validez queda demostrada por una sabia aplicación de los principios teóricos a la práctica.

He intentado hacer ver, mediante diversos ejemplos, cómo se puede hacer uso de las Ciencias matemáticas aplicando sus principios al arte de la construcción de los Edificios: puede ser que si se razonase de este modo so-

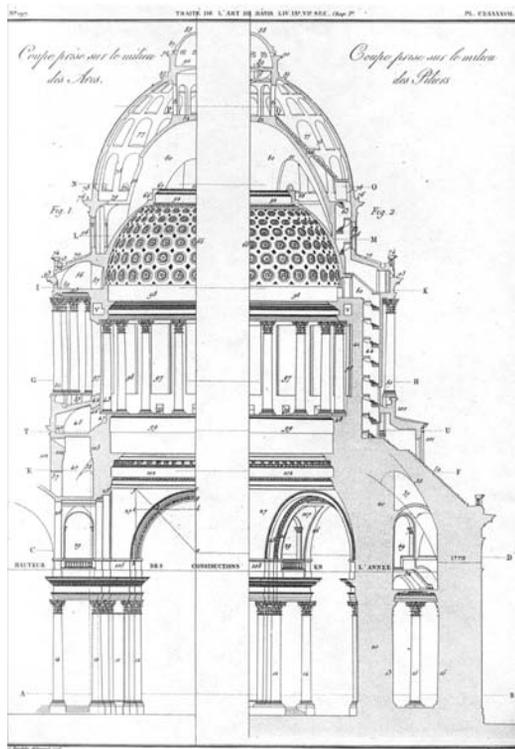


Figura 5  
Sección de la cúpula de Santa Genoveva construida por Rondelet (Rondelet [1797], 1834–48)

bre las construcciones, apreciando los proyectos antes de ejecutarlos, esto fuera el mejor medio de lograr la perfección de este Arte; se sabría al menos lo que se puede intentar, & no se dejaría nada al azar.<sup>46</sup>

## NOTAS

Gema M. López Manzanares es Profesora Titular en el Área de Construcciones Arquitectónicas. Estructuras de Edificación, Universidad de Alcalá de Henares.

1. Para demostrarlo, Patte analizó una cúpula ideal según las reglas de Fontana y del mismo tamaño de la proyectada por Soufflot, aplicando el método de La Hire. Ese mismo año, el matemático Bossut expuso públicamente sus investigaciones sobre la forma ideal de las bóvedas

y un método para calcular el espesor del tambor de las cúpulas basado en La Hire, que aplicó al caso concreto de una cúpula parabólica similar a la de Santa Genoveva. Para Bossut el tambor de la cúpula sería capaz de resistir una linterna de peso doble a la proyectada. Gauthey, sin embargo, no menciona en ningún momento a Bossut, que no publicaría su trabajo hasta 1778.

2. Gauthey (1771, 2)
3. Patte (1770, 6)
4. Gauthey (1771, 5, n.1) comenta las aportaciones de: La Hire, Couplet, Danyzy, Derand, Blondel, Deschales, Delarue y Gauthier.
5. Gauthey (1771, 6)
6. Gauthey (1771, 6, n. 2)
7. Gauthey (1771, 7, n. 3). Según Parsons ([1939] 1976, 627), el pie en Francia equivalía a 0,3248 m.
8. Gauthey (1771, 7). Sin embargo, en la Fig. 1, de la figura 2, toma la del trasdós.
9. Gauthey (1771, 9, n.5)
10. Gauthey (1771, 10–11, n. 6)
11. Gauthey (1771, 11)
12. Según Gauthey (1771, 12) el caso es citado por Frézier (1743, 3: 348).
13. Gauthey (1771, 12)
14. Gauthey (1771, 13)
15. Gauthey (1770, 42–3, n. 15 y 15 (2)). Poleni dividió en cincuenta gajos la cúpula de San Pedro y Bossut consideraba gajos de espesor infinitesimal.
16. Gauthey (1771, 41, n. 14).
17. Gauthey no lo explicita, pero se puede deducir de la Fig. 4, figura 2.
18. Gauthey (1771, 41, n. 14). No explicita que haya aplicado la regla de Guldino, pero se puede deducir que lo hizo en base a los datos de la tabla.
19. Gauthey (1771, 45, n.17)
20. Gauthey (1771, 46–7, nn. 18–19)
21. Gauthey (1771, 47–8, n. 20)
22. Gauthey (1771, 48, n. 21)
23. Gauthey (1771, 47)
24. Gauthey (1771, 49). La anchura en planta de los arcos torales, 5 fi , la indica Gauthey anteriormente, en las pp. 13–15, valor que no coincide con los 3 pies 9 pulgadas de Patte (1770).
25. Gauthey (1771, 50, n. 23)
26. Gauthey (1771, 50–1, n. 24)
27. Aquí Gauthey coloca el empuje tangente al intradós, cuando en el arco toral toma un punto más interior, situado a la mitad del espesor del arco, Fig. 6 en la figura 3.
28. El empuje de cada uno de los arcos debía haberse multiplicado por la raíz de 3 y no por 7/5, es decir, la magnitud del empuje real es 1,23 veces mayor. En cuanto a la dirección del empuje la tangente del ángulo que for-

ma el empuje con la horizontal es en realidad es 10/7 y no 7/5, aunque en este caso el error es mucho menor y compensa ligeramente el error cometido al evaluar la magnitud.

29. El centro de gravedad no es el del pilar solamente sino que se ha tenido en cuenta el desplazamiento que produce el peso de la cúpula, que lo hace más favorable.
30. Gauthey (1771, 51, n. 25). Gauthey comete un error al evaluar el brazo de palanca de los momentos estabilizantes, porque debería ser más pequeño que el considerado en la primera hipótesis. Los pesos son los mismos y por tanto la posición del centro de gravedad es constante. Sólo varía la distancia relativa al punto de vuelco y en esta hipótesis debería ser menor.
31. Gauthey (1771, 52)
32. Gauthey (1771, 53)
33. Gauthey (1771, 53–4, n. 26)
34. Gauthey (1771, 53–4)
35. Gauthey (1771, 54)
36. A diferencia de lo que creía Patte, Gauthey piensa que la separación entre las columnas no las incapacita para colaborar a la estabilidad global del edificio. Gauthey (1771, 14–5).
37. Gauthey (1771, 39)
38. Gauthey (1771, 55, nn. 28–9)
39. Gauthey (1771, 57, n. 30)
40. Gauthey (1771, 57–8, n. 31). Explica de forma un tanto confusa la transmisión de esfuerzos a los muros.
41. Gauthey (1771, 59, n. 32). Esa relación proporcional entre carga vertical y sección horizontal está implicando el concepto de tensión uniformemente repartida.
42. El término utilizado es «redents». Gauthey (1771, 60).
43. Gauthey (1771, 60–2)
44. Gauthey (1771, 64)
45. Gauthey (1771, 36)
46. Gauthey (1771, 67)

## LISTA DE REFERENCIAS

- Belidor, B. F. 1729. *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. París.
- Bergdoll, B. ed. 1989. *Le Panthéon: Symbole des révolutions, de l'Église de la Nation au Temple des grands hommes*. París: Picard.
- Bossut, C. [1774] 1778. Recherches sur l'équilibre des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 534–66, 2 láms.
- Bossut, C. [1776] 1779. Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 587–596, 1 lám.
- Coste, A., A. Picon y F. Sidot, eds. 1993. *Un ingénieur des Lumières. Emiland-Marie Gauthey*. París: Presses de Ponts et Chaussées.
- Frézier, A. F. [1737–9] 1769. *La Theorie et la Pratique de la Coupe des Pierres*. París: C. A. Jombert.
- Gauthey, É. M. 1771. *Mémoire sur l'application des principes de la Méchanique à la construction des voûtes et des domes, dans lequel on examine le Problème proposé par M. Patte, relativement à la construction de la Coupole de l'Eglise Sainte-Geneviève de Paris*. Dijon, París: L. N. Frantin, C. A. Jombert. 67 pp., 3 láms.
- Gauthey, É. M. 1798. *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remedier*. París: H. L. Perronneau, an VI, 131 pp., 2 láms.
- González Moreno-Navarro, J. L. 1993. *El legado oculto de Vitruvio*. Madrid: Alianza Editorial.
- Guillermé, J. 1989. Le Panthéon: une matière à controverse. En *Le Panthéon: Symbole des révolutions, de l'Église de la Nation au Temple des grands hommes*, 151–173. París: Picard.
- Heyman, J. 1972. *Coulomb's memoir on statics*. Cambridge: University Press.
- Heyman, J. [1985] 1995. Los pilares del crucero del Panteón de París. En *Teoría, historia y restauración de Estructuras de fábrica*, 279–81. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Huerta Fernández, S. 1990. Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500–ca. 1800. Tesis. Madrid: ETSAM.
- Huerta Fernández, S. 1996. La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico. *Obra Pública. Revista del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*. NE 38: 18–29.
- Huerta Fernández, S. 2004. *Arcos, bóvedas y cúpulas*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Huerta Fernández, S. y Hernando de la Cuerda, R. 1998. La teoría de bóvedas en el siglo XVIII: la contribución de Philippe de la Hire. En *Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, ed. J. Fernández Salas et al., 233–44. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, Universidad de la Coruña.
- La Hire, P. 1712. Sur la construction des voûtes dans les édifices. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 70–78, 3 figs.
- López Manzanares, G. 1998. Estabilidad y construcción de cúpulas de fábrica: El nacimiento de la teoría y su relación con la práctica. Tesis. Dir. S. Huerta Fernández. Madrid: ETSAM.
- López Manzanares, G. 2005. The relation between theory and practice in the construction of Sainte-Geneviève's church in Paris: Patte's contribution. En *Teoria e pratica del costruire: saperi, strumenti, modelli*, ed. por G. Mochi, 773–783. Ravenna: Ed. Moderna.

- Patte, P. J. 1770. *Memoire sur la construction de la coupole projectée pour couronner la nouvelle église de Saint Geneviève a Paris*. Amsterdam: P. Fr. Gueffier.
- Parsons, W. B. [1939] 1976. *Engineers and Engineering in the Renaissance*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Petzet, M. 1961. *Soufflot's Saint Geneviève und der französische Kirchenbau des 18 Jahrhunderts*. Berlín: W. de Gruyter & Co.
- Pitot, H. 1726. Examen de la force qu'il faut donner aux Cintres dont on se sert dans la construction des grandes Voutes, des Arches des Ponts, etc. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 216–36.
- Poleni, G. 1748. *Memorie Istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Stamperia del Seminario.
- Rondelet, J. B. 1797. *Mémoire historique sur le dôme du Panthéon Français*. Paris: Du Pont.
- Rondelet, J. B. [1802–10] 1834–48. *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. Paris: Chez l'auteur, 1802–10.
- Stocker, J. 1987. Zum Tragverhalten der Zwischenkuppel von St. Geneviève (Pantheon) in Paris. *Diplomarbeit*, Universität Stuttgart, Inst. für Baustatik.
- Straub, H. 1952. *A History of Civil Engineering*. Londres: Leonard Hill.